104 不動点定理に就て III.

佐藤 徳意 (九大) (6.8)

次に談話77で述べたII) に就て述べよう.

<u>Lemo. 1.</u> "Rを実数体に関し連続群とする. 集合AがKompaktaならばAの閉包 $\bar{A}$ も亦 Kompaktaである."

<u>Lemo 2.</u> "Rは次の条件を満足するLinia L^*-spacoとする. $x_n \to x$ $y_n \to y$ ならば、$x_n + y_n \to x + y$. $\lambda x_n \to \lambda x$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$とする. AがRのkonveksaな集合ならばAの閉包 $\bar{A}$ も亦 konveksaである."

前談話で述べた不動点定理とLemo 1, 2により直ちに次の不動点定理を得る.

<u>定理 1</u> "RをLinia metrica spacoとする. KをRにおける閉じた凸集合, $y = f(x)$ はKで定義された連続写像とし. $f(K)$ は Kompakta とする.

Rが $f(K)$ の閉苞 $\overline{f(K)}$ で lokale preskaŭ konveksa ならば少くとも一つの不動点

$$x=f(x) \qquad\qquad x\in f(K)$$

が存在する。"

<u>系</u> "R を linia metrica spaco とする。

K を R に於ける閉じた凸集合, $y=f(x)$ は K で定義された連続写像とし, $f(K)$ は kompakta とする。R が K で lokale preskaŭ konveksa ならば少くとも一つの不動点

$$x=f(x) \qquad\qquad x\in f(K)$$

が存在する。"

$\mathfrak{F}$ を m 次元 Eŭklid-a spaco に於ける領域 D で定義された連続函数(系)の族とする。然るときは次のやうな有界閉領域 $\{D_\nu\}$ をとることが出来る：

$$D_\nu \subset D_{\nu+1} \qquad\qquad (\nu=1.2\ \text{----}),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} D_\nu = D.$$

$f(x)$ $g(x)\in\mathfrak{F}$ の距離を

(1) $$\|f(x)-g(x)\| = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\frac{\delta_\nu}{1+\delta_\nu}$$

で定義する。但し

$$\delta_\nu = \max_{x\in D_\nu}\left|f(x)-g(x)\right|$$

これから次の定理を得る。

<u>定理2.</u> $\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|=0$ は函数列 $\{f_n(x)\}$ が函数 $f(x)$ に領域 D で広義の一様収斂することと ekvivalenta である。

$\mathfrak{F}$ が(1)に依って metrica されたとき σ-spaco と云ふ。

<u>定理3.</u> "σ-spaco は linia metrica kaj kompleta spaco である。"

領域 D での広義の一様収斂性を以て函数(系)族 $\mathfrak{F}$ に topologio を入れると, $\mathfrak{F}$ は linia topologia spaco をなすことは容易に分る。これを簡単に L^*-spaco と云ふと次の系を得る。

<u>系</u> "L^*-spaco は σ-spaco に linie homeomorfa である。"

<u>定理4.</u> "$\mathfrak{F}_c$ は領域 D で

$$|f(x)| \leq G$$

なる連続函数(系) $f(x)$ の族とする. 然るときは

$$\|\lambda f(x)\| \leq k|\lambda|\,\|f(x)\| \quad , \quad |\lambda| \leq 1$$

である. 茲に k は定数で $k = 1 + G$ ととることが出来る.

定理1系及び定理2－4に依り次の函数(系)の族に関する定理を得る.

定理5. "$\mathfrak{F}$を領域Dで定義された連続且つ一様有界な函数(系)の族とする. 変換,

$$F(x) = \Phi(f(x)), \quad f(x) \in \mathfrak{F}$$

は $f_0(x)$ にDで広義の一様収斂する函数列 $\{f_n(x)\}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n(x)) = \Phi(f_0(x))$$

が成立する.

$\bar{\mathfrak{F}}$で函数(系)族 $\{\bar{f}(x)\}$ を表すとき $\bar{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F}$ で且つ $\bar{\mathfrak{F}}$ はDで同程度連続ならば

$$f(x) = \Phi(f(x)) \qquad f(x) \in \bar{\mathfrak{F}}$$

なる $f(x)$ が存在する."

この定理は表面に抽象空間に於ける概念を用いて表現して居ない為応用の際極めて便利で. 例へば常微分方程式論に於ける古典的な Peano の存在定理は7－8行で証明出来る.

定理5は連続函数族に関する定理であるが Borel 集合に於て定義された加法的集合函数族に関しても全く同様な定理を得る.